数理解析研究所講究録
986 巻 1997 年 105-109

種数計算とヘンゼル構成の関係について

筑波大学数学研究科 椎原浩輔 (Kosuke Shiihara)

Abstract. 代数曲線の種数計算については, 現在では特殊な場合を除き一般には困難とされている. 一方最近の研究で, 拡張されたヘンゼル構成は実に応用範囲が広く, 数値的な取り扱いにも非常に安定している事が分かっている. 本稿では, 幾何学的不変量である種数 (genus) と拡張されたヘンゼル構成の関係について考察し, その計算アルゴリズムを提案する.

1. はじめに

まず, はじめに古典的な2次変換を用いる特異点解消法について触れておく. この方法では種数を計算するのは理論的には可能だが, 現実的には不可能とされてきた. また, 特別な場合に対応する計算法も考案されているが, 一般性という観点からみれば不十分なものばかりである. 一方, 本論で述べる方法は理論的には古典的といわれている2次変換による特異点解消法を基礎としているが, 実用面では拡張されたヘンゼル構成を用い, 計算過程を簡素化した. また, 係数を数値的に取り扱うことにより, 計算が容易になる. 浮動小数を導入した計算の安定性は拡張されたヘンセル構成より保証される.

斉次多項式 $F(x,y,z)$ で定まる代数曲線を C とする. このとき F の2次変換とは $F(yz,zx,xy)$ の因子で, 各変数 x, y, z で割り切れない因子をいう. 2次変換と適当な座標変換を有限回繰り返すことによって, 特異点として通常特異点のみを持つ曲線を作ることができる. [2],[4]

$$C = C_0 \xrightarrow{T_1} C_1 \xrightarrow{T_2} C_2 \cdots \xrightarrow{T_n} C_n$$

ここで T_i は C_{i-1} を C_i へ移す2次変換とする. C_i を定義する多項式の次数を d_i とする. また, C_i に含まれる近傍特異点の集合を N_i とし, 曲線上の点 p の多重度を r_p で表すことにすると, 以下の定理が示される.

定理 1 任意の i $(0 \leq i < n)$ に対して,

$$(d_i-1)(d_i-2) - \sum_{p\in N_i} r_p(r_p-1) = (d_{i+1}-1)(d_{i+1}-2) - \sum_{p\in N_{i+1}} r_p(r_p-1)$$

Proof. [2] を参照.

補題 2 $P_1, P_2, \ldots, P_s$ を代数曲線 C の特異点, $S = \{P_1, P_2, \ldots, P_s\} \cup N(P_1) \cup N(P_2) \cup \cdots \cup N(P_s)$ とする. ここで $N(P_k)$ は2次変換に関する P_k の全ての近傍特異点の集合である. このとき種数 g に関して次が成り立つ.

$$g = \frac{1}{2}\left\{(d-1)(d-2) - \sum_{p \in S} r_p(r_p - 1)\right\}$$

Proof. [2] を参照.

上の補題によって, 次に述べるアルゴリズムは保証される.

2. アルゴリズム

アルゴリズム **genus**
Input: 代数曲線 C を定める既約斉次多項式 $F(x,y,z)$
Output: 代数曲線 C の種数

Step1 [初期設定]
$S \leftarrow F(x,y,z)$ の特異点の集合
$r \leftarrow 0$
$d \leftarrow \deg(F)$

Step2 [特異点を選ぶ]
$S = \emptyset$ であれば $\dfrac{(d-1)(d-2)-r}{2}$ を返し, 終了する.
$p \leftarrow S$ の要素
$S \leftarrow S - \{p\}$

Step3 [座標変換]
p を $(0:0:1)$ へ移動させる射影変換を $F(x,y,z)$ に施す.
$f(x,y) \leftarrow F(x,y,1)$
$m \leftarrow p$ の多重度
$f(0,y)$ に項 y^m あるいは項 y^d がなければ $f(x,y) \leftarrow f(x+ay,y)$
a は適当な整数

Step4 [ヘンゼル構成]
$f(0,y) = f_1^{e_1} \cdot f_2^{e_2} \cdots f_s^{e_s}$ と因数分解し, これらを因子とする
ヘンゼル構成 $f(x,y) \equiv f_1^{(k)} \cdot f_2^{(k)} \cdots f_s^{(k)} \pmod{y^{k+1}}$ を行う.
$r \leftarrow r + \sum_{e_i \geq 2} \mathbf{exthensel}\left(f_i^{(k)}(x, y - f_i(0))\right)$
Step2 へ戻る

アルゴリズム **exthensel**
Input: 多項式 $g(x,y)$
Output: 非負整数値

---

(1) $g(x,y)$ の Newton 多項式を $g^{\text{newton}}(x,y) = g_1^{e_1} \cdot g_2^{e_2} \cdots g_s^{e_s}$ と因数分解する.
(2) すべての e_i $(1 \leq i \leq s)$ が 1 でなければ, これらを初期因子とする
拡張されたヘンゼル構成 $g(x,y) \equiv g_1^{(k)} \cdot g_2^{(k)} \cdots g_s^{(k)} \pmod{y^{k+1}}$ を行い,
そうでない時には 0 を返して終了する.
(3) $s = 1$ なら $\textbf{exthensel}\left(g_1^{(k)}(x, y - g_1(x,0))\right)$ を返し終了し,
$s \geq 2$ なら $\displaystyle\sum_{e_i \geq 2} \textbf{exthensel}\left(g_i^{(k)}(x, y - g_i(x,0))\right) + \sum_{i=1}^{s} e_i(e_i - 1)$ を返し, 終了.

注意　上記のアルゴリズムにおいて, 因数分解時にあらかじめ多重因子を持たない部分を取り出しておくと, 効率良く計算を行える.

3. 例

$$F(x,y,z) = x^4 + 2x^2y^2 + 8x^2yz - 16x^2z^2 + y^4 + 8y^3z$$

とする. この多項式で定義される代数曲線の特異点は

$$S = \{(0:0:1),\ (-1+i:1:0),\ (-1-i:1:0)\}.$$

$p \leftarrow (0:0:1)$, $S \leftarrow \{(i:1:0),\ (-i:1:0)\}$ として原点で特異点の分かれ方を調べてみる. この点は非通常 2 重特異点だが, $x = 0$ では $f(0,y) = y^4 + 8y^3$ となって接錐 (tangent cone) が消滅してしまうので, 座標変換 $x \to x + y$ を施しておく.

$$f(x,y) = y^4 + 2y^3x + 4y^3 + 2y^2x^2 + 4y^2x - 4y^2 + yx^3 + 2yx^2 - 8yx + \frac{1}{4}x^4 - 4x^2$$

こうしておけば接錐は消滅せず, 次のようにヘンゼル構成の種を選ぶことができる.

$$\begin{aligned} f(0,y) &= y^4 + 4y^3 - 4y^2 \\ &= \underbrace{(y^2 + 4y - 4)}_{f_1} \cdot \underbrace{y^2}_{f_2} \end{aligned}$$

f_1 は多重因子を含まないので, f_2 のみ拡張されたヘンゼル構成を適用する.

$$\begin{aligned} g(x,y) &= f_2(x, y-0) \\ &= y^2 - \frac{189}{16}yx^4 + \frac{15}{4}yx^3 - \frac{3}{2}yx^2 + 2yx + \frac{43}{16}x^4 - x^3 + x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g^{\text{newton}}(x,y) &= y^2 + 2yx + x^2 \\ &= (y+x)^2 \end{aligned}$$

$g^{\text{newton}}(x,y)$ は多重因子 $(y+x)^2$ を含むので, さらに拡張されたヘンゼル構成を適用する.

$$\begin{aligned} h(x,y) &= g(x, y-x) \\ &= y^2 - \frac{189}{16}yx^4 + \frac{15}{4}yx^3 - \frac{3}{2}yx^2 + \frac{189}{16}x^5 - \frac{17}{16}x^4 + \frac{1}{2}x^3 \end{aligned}$$

$$h^{\text{newton}}(x,y) = y^2 + \frac{1}{2}x^3$$

$$\therefore \quad r = \sum r_p(r_p - 1) = 2$$

Newton 多項式を y と $x^{3/2}$ に関する斉次多項式とみなすと, 多重因子を含まないので **genus [Step2]** へ戻る.

残りの特異点について同様に **genus [Step2]**~**genus [Step4]** を繰り返し,

$$r = 6$$

を得る.

4. 謝辞

最後に, 御指導くださった佐々木建昭教授, 助言をくださった小林英恒教授, 北本卓也助手に感謝致します.

参 考 文 献

[1] F.Kirwan, *Complex Albebraic Curves.* London Mathematical Society, Student Texts 23, 1992.

[2] J.Sendra and F.Winkler, Symbolic Parametrization of Curves. J. Symb. Comp. 1991. 12, pp 607–631.

[3] K.Shiihara, Computation of Essentially Differet Puiseux Expansions via Extended Hensel construction. Master thesis. Univ. of Tsukuba. 1995.

[4] R.Walker, *Algebraic Curves.* Princeton University Press. 1950.

[5] T.Sasaki and F.Kako, Solving multivariate algebraic equation by Hensel construction. Preprint of Univ. Tsukuba, January 1993. 22 pages.